

LE SESSE DEL LAGO DI GARDA

PARTE IV

OSCILLAZIONI LIBERE DEL BACINO ORIENTALE

P. CALOI - M. C. SPADEA

I. — Un bacino esteso e dalla forma complessa come quello del Lago di Garda, non può evidentemente esaurire le proprie libere oscillazioni a quelle che lo interessano nella sua totalità. Anche i suoi golfi e parti determinate comunque limitate dalle sponde, possono essere sede di oscillazioni proprie. Abbiamo visto così che libere oscillazioni possono avere la parte settentrionale del Garda, il Golfo di Salò, il Golfo di Desenzano nonché quelle parti del Lago caratterizzate da un lento procedere dello zoccolo verso le regioni più profonde. Queste ultime parti danno origine alle così dette « self-seiches », che risultano particolarmente sensibili nel golfo di Desenzano.

Una trattazione a parte meritava il bacino orientale del Garda (bacino Peschiera-Garda), che, sotto certi aspetti, forma un bacino a sé. Infatti l'esistenza di una dorsale subacquea (dai pescatori chiamata « linea dei monti ») che da Punta Sirmione porta a Punta S. Vigilio, viene a fare del bacino Peschiera-Garda un bacino con caratteristiche proprie, con propri movimenti. Osserviamo ancora che tale bacino ha una profondità media molto piccola e che pertanto sarebbe capace, qualora le condizioni idrodinamiche lo consentissero, di lunghissime oscillazioni proprie.

Lo studio delle oscillazioni di questo bacino si presentava pertanto, tutt'altro che agevole. Le osservazioni mostravano l'esistenza di tutta una serie di oscillazioni, registrate a Peschiera, che da periodi di 30^m ca. vanno a periodi di pochi minuti.

In questo lavoro ci siamo proposti di giustificare tali oscillazioni nel senso fisico e di spiegare le loro principali caratteristiche, intimamente legate alla forma del bacino stesso, alla sua piccola profondità ed al fatto di essere esso collegato con un bacino molto più esteso, ma nello stesso tempo notevolmente più profondo.

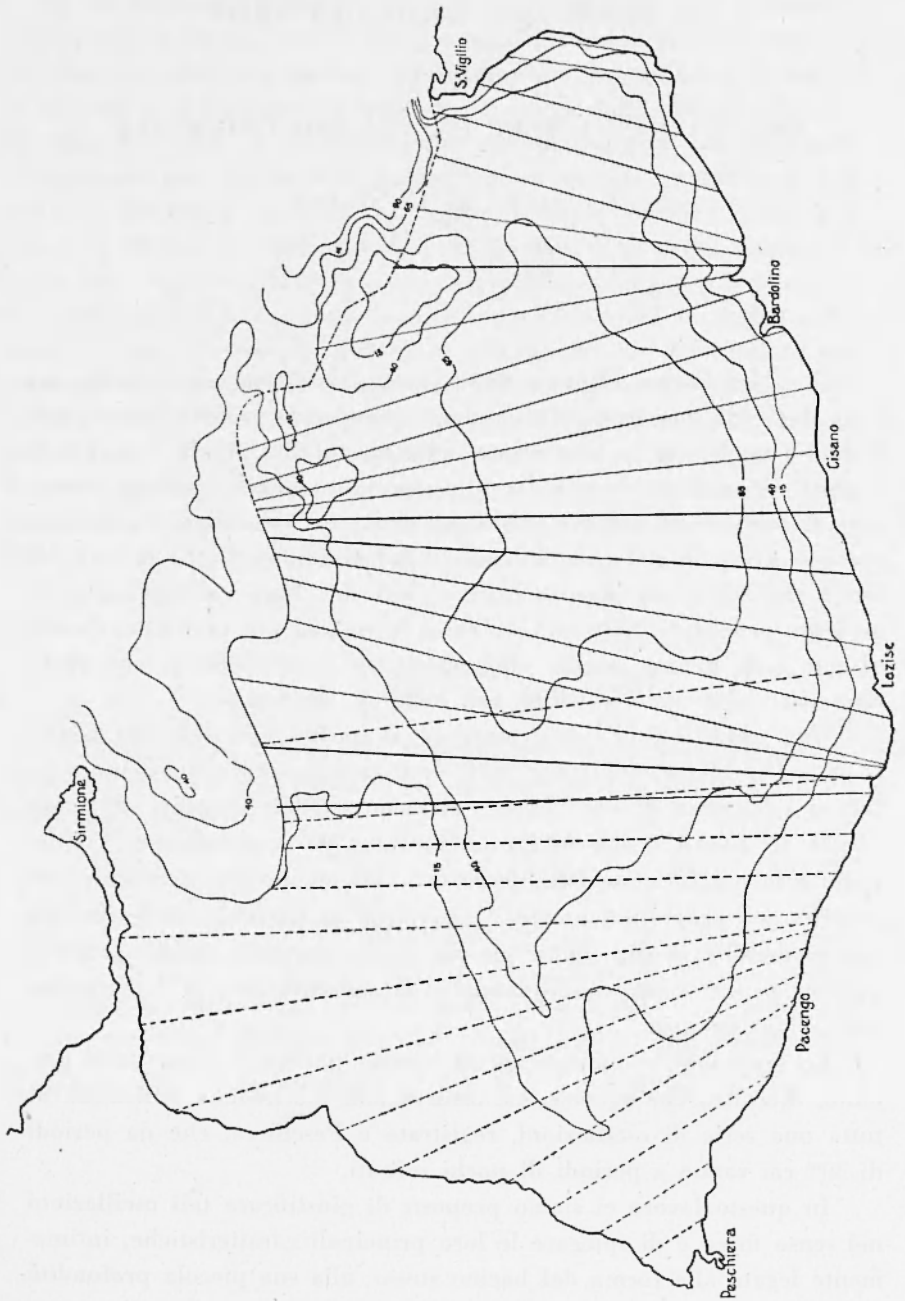


Fig. 1

2. — Il primo grosso problema da risolvere consisteva nel rispondere alla seguente domanda: l'oscillazione di 30^m interessa l'intero bacino Peschiera-Garda considerato come golfo aperto sul restante bacino occidentale?

Abbiamo già risposto altrove negativamente a questa domanda (1).

Qui trattiamo la questione in dettaglio.

Furono fatte due ipotesi. La prima contempla l'oscillazione del bacino come golfo aperto sulla bocca punta S. Vigilio-Sirmone, oscillante in media direzione Est-Ovest e quindi con andamento pressoché parallelo alla costa Peschiera-Lazise-Garda. Furono allora tracciate tredici sezioni del bacino stesso con l'andamento dianzi accennato. Nella Tabella 1 sono contenuti i dati tratti dalla morfologia delle sezioni stesse, nonché i risultati dell'applicazione del metodo Hidaka. La teoria di tale metodo è stata più volte precedentemente esposta.

Nel caso $m = 2$ si ottennero i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \text{periodo oscillazione uninodale} &= 56^m \\ \text{periodo} \quad \gg \quad \text{binodale} &= 29^m,5. \end{aligned}$$

Tali risultati sono evidentemente negativi ai fini della nostra ricerca. Va osservato infatti che essi risulterebbero anche maggiori di quelli ottenuti, in quanto andrebbero moltiplicati per il fattore di correzione di bocca, nel caso in esame piuttosto sensibile. Un'oscillazione uninodale di certo superiore all'ora, sarebbe possibile solo se il golfo Peschiera-Garda fosse aperto su un bacino con periodo di oscillazione uninodale per lo meno uguale. Sappiamo invece che il Garda nel suo complesso ha un'oscillazione uninodale di 43^m. Il valore ottenuto per questa via è quindi da scartare. Lo stesso dicasi per l'oscillazione binodale, che risulterebbe notevolmente superiore all'oscillazione binodale dell'intero lago (24^m ca.).

Le oscillazioni con le caratteristiche sopraddette potrebbero aver luogo eventualmente solo come oscillazioni forzate.

Siamo allora passati ad una seconda ipotesi, che considera l'intero bacino orientale come oscillante a sé in direzione Nord-Sud.

Il bacino Peschiera-Garda fu suddiviso in 33 sezioni, normali alla linea di valle, con generale andamento Est-Ovest (fig. 1). La linea di valle è costituita dal canale subacqueo che dalla secca del Vò — e sul lato occidentale di questa — conduce a Peschiera, di dove esce con il nome di Mincio.

La Tabella 2 porta le distanze delle singole sezioni contate a partire da Garda, l'area delle sezioni stesse, la loro larghezza in super-

ficie e gli altri elementi necessari per l'applicazione del metodo di Hidaka. Detto metodo è stato applicato per il caso $m = 1$, al quale corrisponde, per i periodi, la seguente equazione:

$$(I_0 I_2 - I_1^2) \lambda^2 - \left(\frac{2}{15} I_0 - \frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{3} I_2 \right) \lambda + \frac{1}{60} = 0,$$

dove

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2 (1-z)^2 z^n}{\sigma(z)} dz \quad (n = 0, 1, 2)$$

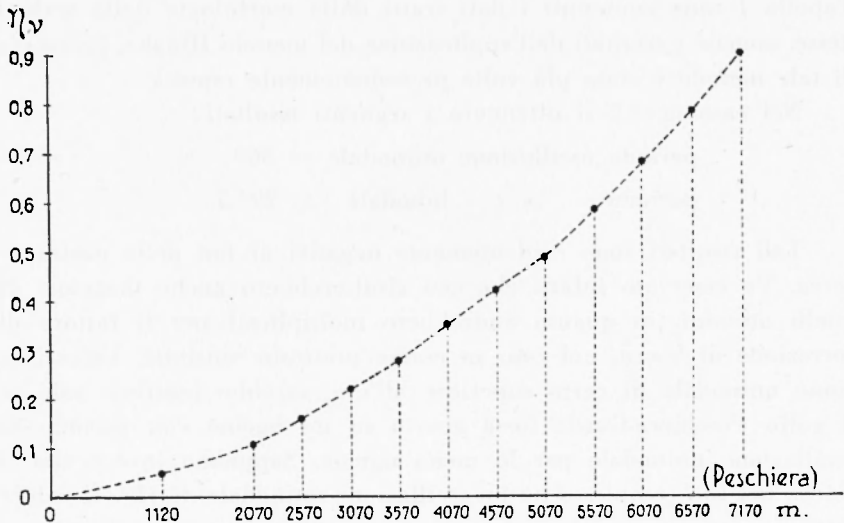


Fig. 2

essendo $z = v/a$ e v l'area, calcolata alla superficie libera, della superficie delimitata da una determinata sezione verticale $S(x)$ e dall'estremo $x = 0$; a è l'area superficiale totale del bacino. Si sa inoltre che $\sigma(z) = b(z)S(z)$. Con i dati della Tabella 2 si sono ottenuti i seguenti valori per I_0, I_1, I_2 : $I_0 = 1,9880880 \cdot 10^{-5}$; $I_1 = 1,1945375 \cdot 10^{-5}$; $I_2 = 0,8308349 \cdot 10^{-5}$. L'unità scelta fu l'ettometro. Risolta l'equazione dei periodi si sono ottenuti per λ i valori:

$\lambda_1 = 15198$; $\lambda_2 = 48762$, che corrispondono all'oscillazione uninodeale e binodeale rispettivamente.

A questi valori corrispondono i periodi $T_1 = 24^m, 1$; $T_2 = 13^m, 5$. Va tenuto conto anche per questo caso, della correzione di bocca.

A questo riguardo, dobbiamo però osservare che noi abbiamo considerato il bacino come oscillante in sé e non come golfo. Pertanto nella formula che dà il termine correttivo per l'influsso dell'apertura all'estremo Nord-Ovest, dobbiamo introdurre in luogo della lunghezza dell'intero golfo, la distanza dall'estremo Sud dell'uninodo.

Passando al calcolo, si trova che l'equazione dell'uninodo è:

$$6,2874 z^2 - 2,1916 z - 1 = 0,$$

la quale, risolta in z , per i valori compresi fra 0 e 1, conduce a $z = 0,6095$. L'uninodo pertanto verrebbe a trovarsi a circa 9 km a Sud di Garda.

Poiché il rapporto fra l'apertura del bacino considerato e la sua lunghezza è dell'ordine di 9/10, ne consegue per il fattore di correzione il valore 1,2. L'uninodale pertanto ha un valore effettivo di:

$$T = 29^m \text{ ca.}$$

Questo risultato poteva essere ritenuto soddisfacente. Esso consentiva infatti di poter concludere che l'oscillazione di 30^m ca. registrata a Peschiera interessava il bacino Peschiera-Garda solo parzialmente: in altri termini l'oscillazione stessa non aveva la linea nodale in corrispondenza del tratto punta Sirmione - punta S. Vigilio, bensì un uninodo interno al bacino stesso. Si poteva quindi arguire che tale uninodo doveva limitare, verso Nord, la parte del bacino Peschiera-Garda oscillante come golfo con il periodo suddetto.

3. — Restava da trovare una conferma sperimentale a questo risultato, conferma che avrebbe servito poi per l'applicazione di un metodo analitico, atto a precisare il valore dell'uninodale del golfo ridotto.

Ci siamo serviti a questo scopo di un modello del lago di Garda, espressamente costruito per lo studio particolareggiato delle oscillazioni libere dell'intero lago e di sue singole parti (²).

È noto che, conosciuto il rapporto fra la scala delle dimensioni orizzontali e quella verticale, grazie al principio di Harris, è possibile risalire dal comportamento del modello a quello effettivo del bacino naturale. Se indichiamo con a il rapporto fra le dimensioni

orizzontali del bacino naturale e del modello e con b il rapporto delle corrispondenti dimensioni verticali, il fattore che consente di passare dai periodi osservati sul modello ai reali periodi del bacino, è dato da:

$$\tau = a / \sqrt{b}$$

Il modello in parola è stato costruito in modo da far assumere a τ il valore 850.

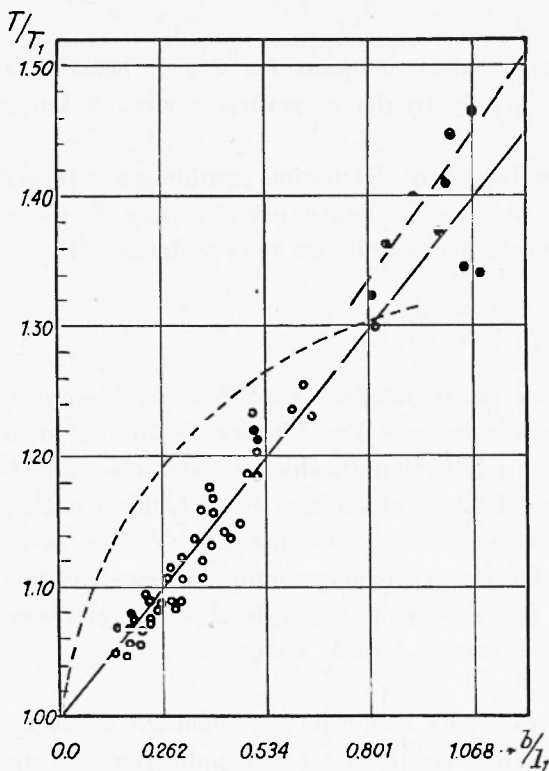


Fig. 3 - Dipendenza del fattore di correzione T/T_1 dalle dimensioni della bocca e del bacino (b = larghezza del bacino; L_1 = lunghezza effettiva del bacino; la linea curva rappresenta la teoria « giapponese »; i punti e i tratti rettilinei rappresentano i risultati delle esperienze di Neumann).

Per quanto si riferisce al bacino Peschiera - Garda, furono seguiti opportuni accorgimenti che hanno consentito di ottenere, come periodo della oscillazione fondamentale del relativo modello, il valore $T = 2^s,05$. Che questo sia il periodo della fondamentale del golfo ridotto Peschiera-Garda è provato dal fatto che, con tale ritmo, l'oscillazione del modello persiste a lungo, presentando la linea nodale in corrispondenza del tratto punta Sirmione - Lazise.

Tenuto conto del rapporto di riduzione con cui è stato costruito il modello, ne segue che il periodo della fondamentale del bacino Peschiera - Gar-

da deve essere dell'ordine di 29^m ca. Questo valore è assai prossimo alla media dei periodi di detta oscillazione, quali vengono osservati a Peschiera.

4. — Si aveva così la prova sperimentale sull'esistenza di una oscillazione che interessava solo parzialmente il bacino Peschiera-Garda, nel senso che la sua linea nodale può essere senz'altro ritenuta come limite della parte del bacino che entra in oscillazione con quel periodo.

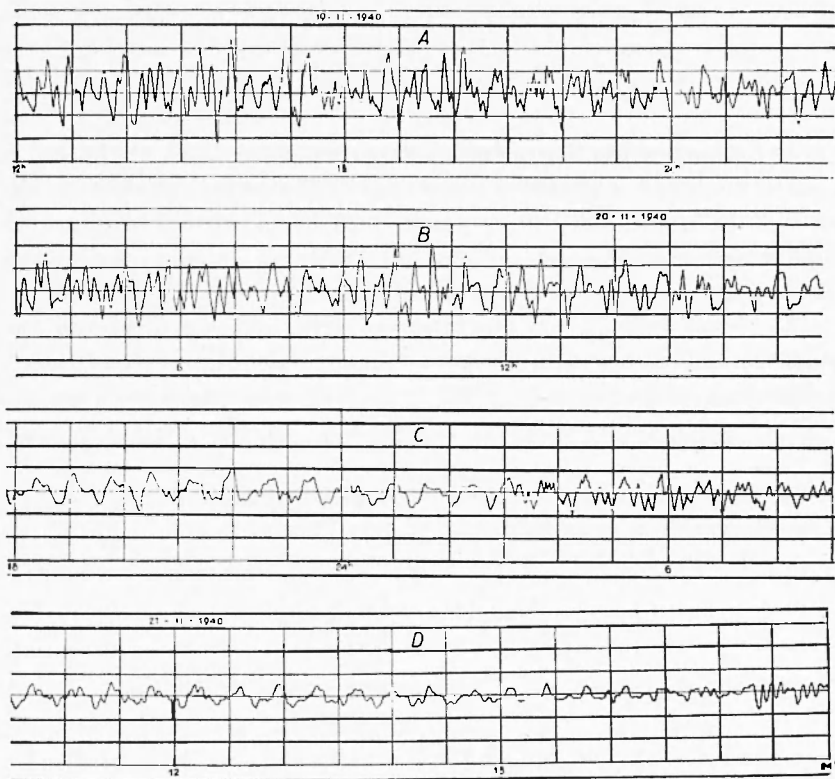


Fig. 4 (Riduzione 1/17 dell'ampiezza naturale).

Una ulteriore conferma di questo risultato poteva aversi applicando al golfo ridotto uno dei metodi analitici che valgono appunto per i bacini aperti. Ed è quello che è stato fatto con l'applicazione del metodo di Goldberg.

Tale metodo è stato esposto in un lavoro precedente, al quale rimandiamo il lettore ⁽³⁾. Riassumiamo qui soltanto quella parte che ci è servita per i calcoli.

Indichiamo con ξ_v ed η_v gli spostamenti massimi orizzontali e verticali determinati nell'interno del golfo, in corrispondenza della sezione v . ma, dal passaggio della massa d'acqua arbitraria m_0 , che

attraversa la sezione di bocca nel tempo pari ad un quarto di periodo. Dalle equazioni di moto e di continuità dell'idrodinamica, si trae allora, nel caso di moto sinusoidale:

$$\frac{d\eta_v}{dx} = \frac{4\pi^2}{gT^2} \cdot \xi_v$$

$$\eta_v = -\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{d}{dx} [S(x_v) \cdot \xi_v] \quad [1]$$

Il bacino va inteso suddiviso, a partire dalla linea di bocca, in n parti, mediante n sezioni trasversali S_v , praticate normalmente alla linea di valle nei punti $x = x_v$ ($v = 1, 2, 3, \dots, n$), alle distanze rispettive Δx_v anche esse contate sulla linea di valle. Si suole indicare con Δv_v le porzioni di superficie libera comprese fra S_v ed S_{v-1} .

La prima delle [1] dà l'inclinazione della tangente al profilo longitudinale della superficie libera oscillante del golfo. Poiché questa inclinazione viene supposta costante per ogni suddivisione (ciò che equivale a ritenere trascurabile l'ammontare di $\frac{d^2\eta}{dx^2}$, come generalmente si verifica nei bacini naturali) il profilo longitudinale del golfo in oscillazione viene approssimato ad una linea spezzata. Si ha:

$$\Delta \eta_{v+1} = \frac{d\eta_v}{dx} \Delta x_{v+1}$$

e lo schema di calcolo per l'integrazione numerica diviene:

$$\xi_v = \frac{m_v}{S_v}, \quad \frac{d\eta_v}{dx} = \frac{4\pi^2}{gT^2} \cdot \xi_v$$

$$\eta_{v+1} = \eta_v + \frac{d\eta_v}{dx} \cdot \Delta x_{v+1}, \quad m_{v+1} = m_v - \frac{\eta_v + \eta_{v+1}}{2}$$

L'ultima delle [2] sta ad indicare che il dislivello sulla superficie $v+1$ che intercede fra le sezioni S_v ed S_{v+1} è dovuto all'eccedenza dell'acqua entrante da S_v su quella uscente da S_{v+1} .

Il periodo prescelto potrà allora ritenersi preciso quando, all'estremo chiuso del golfo, si abbia

$$m_0 - \sum_1^{n-1} \frac{\eta_v + \eta_{v+1}}{2} \Delta v_{v+1} = 0 \quad [3]$$

Sensibili scostamenti, in un senso o nell'altro, da questa condizione comportano un'opportuna variazione del periodo prescelto.

Per quanto riguarda il caso in esame, furono praticate al golfo ridotto, a partire dalla linea nodale, considerata come linea di bocca, dodici sezioni. La Tabella 3 riporta nelle prime quattro colonne i dati necessari all'applicazione del metodo, e cioè il numero d'ordine delle sezioni, l'area delle sezioni trasversali, la distanza tra una sezione e l'altra e l'area delle porzioni di superficie dell'acqua, comprese fra due sezioni consecutive.

Furono fatte applicazioni del metodo partendo da un valore di 22^m, valore che si è dimostrato troppo piccolo.

Per un periodo di 25^m veniva invece un piccolo eccesso nella condizione di azzeramento contenuta nella [3]. Una ulteriore applicazione fatta per $T = 23^m,8$ ha portato a soddisfare in pieno la [3] (Tabella 3 e fig. 2).

Restava ora da stabilire la correzione di bocca. È noto che i giapponesi Honda, Terada, Yoshida e Isitani ⁽¹⁾ hanno trovato, come fattore correttivo, dovuto all'apertura dei golfi, l'espressione:

$$(1 + 4 Pb/l)^{1/2}$$

dove \underline{b} è la larghezza della bocca, \underline{l} la lunghezza del golfo e

$$P = \frac{1}{2\pi} \left(3/2 - \gamma - \log_e \frac{\pi b}{4l} \right),$$

essendo γ la costante di Mascheroni ($\gamma = 0,5772\dots$).

Nel nostro caso il rapporto b/l vale 0,8. Per un tale rapporto si ottiene un fattore di correzione pari ad 1,3. Pertanto il periodo dell'oscillazione fondamentale del golfo ridotto risulta, in definitiva, pari a

$$T = 30^m,9 .$$

Si sa però che la formula ottenuta dai giapponesi non è da tutti accettata come rispondente alla realtà dei fatti. Comunque essa vale per bacini aperti di forma rettangolare e con profondità uniforme. Di recente la questione è stata ripresa dal tedesco G. Neumann ⁽²⁾, il quale ha concluso che risponde molto meglio all'esperienza il considerare un fattore correttivo crescente linearmente al crescere del rapporto b/l .

TABELLA 3

Sez.	$S(x)$ 10^4 m^2	Δxy m	$v(x)_v$ 10^4 m^2	$T = 24 \text{ m}$			$T = 23,8 \text{ m}$		
				$\xi(x)_v$ m	$\eta(x)_v$ m	m_v 10^7 m^3	$\xi(x)_v$ m	$\eta(x)_v$ m	m_v 10^7 m^3
0	42,05		0	23,5	0	1,000	23,5	0	1,000
1	30,4	1120	1048,7	32	0,051	0,973	32	0,052	0,973
2	18,15	950	845	49,8	0,110	0,905	49,8	0,112	0,904
3	14,82	500	442,5	57,1	0,158	0,846	56,9	0,161	0,844
4	11,9	»	500,6	63,5	0,213	0,756	62,9	0,217	0,749
5	9,12	»	513,7	69,2	0,275	0,631	68,2	0,279	0,622
6	7,12	»	381,2	72,1	0,342	0,513	70,6	0,346	0,503
7	5,15	»	301,2	77,5	0,412	0,399	75,3	0,416	0,388
8	2,7	»	250,6	105,9	0,487	0,286	101,9	0,490	0,275
9	1,67	»	215	101,8	0,590	0,170	95,2	0,590	0,159
10	0,7	»	128,1	125,7	0,689	0,088	110,0	0,684	0,077
11	0,25	»	68,1	148	0,811	0,037	108,0	0,792	0,027
12	0	»	33,1		0,955	0,008		0,898	-0,001



Fig. 5 (Riduzione 1/17 dell'ampiezza naturale).

Nella fig. 3 sono riportati i risultati ottenuti sperimentalmente da Neumann, nonché la curva corrispondente alla formula giapponese. Da detta figura risulta che il divario è particolarmente notevole per valori del rapporto b/l minori di 0,5 e maggiori di 1. Per quanto si riferisce al caso in esame sia la formula giapponese sia la relazione di Neumann conducono allo stesso risultato, come appare chiaro dalla figura citata. Pertanto possiamo concludere assegnando al valore ottenuto per il periodo una buona attendibilità.

5. — RegISTRAZIONI sistematiche dei movimenti liberi del bacino Peschiera-Garda non sono ancora state compiute. Però a Peschiera, da qualche decennio, funziona un idrometrografo, il cui scopo specifico è quello di rivelare le variazioni di livello del lago. Lo strumento ha una sensibilità sufficiente per consentirgli altresì la registrazione delle sesse. Esso infatti dà quasi di continuo notevoli esempi di registrazione delle sesse uninodali interessanti l'intero lago, nonché di altri movimenti liberi che riguardano sia il lago nella sua totalità sia il bacino Peschiera-Garda o parti di esso.

Fra queste registrazioni non mancano naturalmente quelle oggetto di questo studio. Nello spoglio dei limnogrammi ottenuti nel 1941 abbiamo trovato evidenti esempi di oscillazioni con periodo fra i 30^m e i 31^w. Nelle figg. 4-7 ne sono riportati alcuni.

Il modo come si verificano, conferma l'origine idrodinamica di dette oscillazioni, le quali, come appare dalle figg. 5, 6 e 7 vengono registrate singolarmente separate da intervalli più o meno lunghi. Ciò si spiega, tenendo presente che tali registrazioni interessano solo una parte del golfo, e quindi sono oscillazioni di un bacino aperto sopra altro bacino molto più esteso. In tal modo, quando la causa perturbante agisce, l'oscillazione tornando dalla base del golfo, prosegue oltre l'uninodo come onda progressiva e pertanto si esaurisce in un periodo. L'insorgere di una nuova oscillazione, presuppone la ripresa o la continuità della causa origine (esempi notevoli specie in A, C, D fig. 5: in A, B fig. 6 e in A fig. 7).

A questo riguardo, gli esempi riportati sono particolarmente significativi.

A Peschiera naturalmente, si ha la registrazione di tutta una serie di oscillazioni che, dall'uninodale interessante l'intero lago (con un periodo di 43^m ca. - fig. 6-C) vanno a quelle riguardanti lo zoccolo che dalla spiaggia di Peschiera si protende verso il largo. Le figg. 4, 5, 6 riportano esempi anche di queste ultime oscillazioni. Particolarmente



Fig. 6 (1/20 dell'ampiezza naturale).

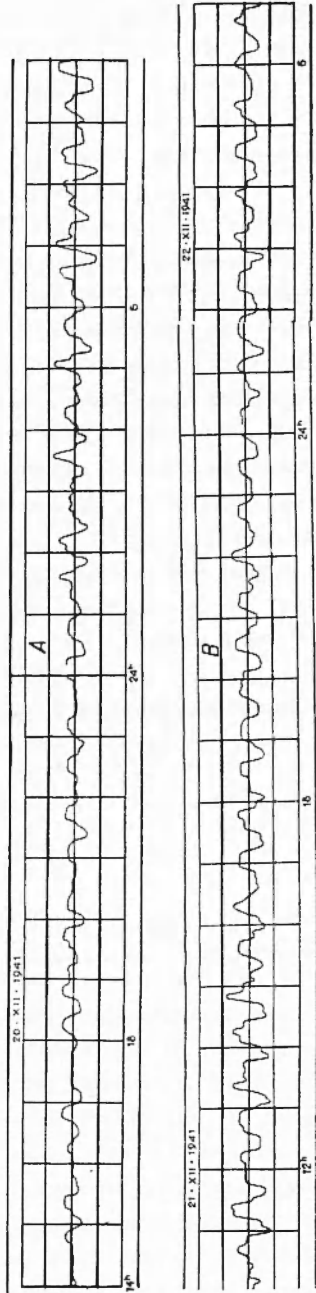


Fig. 7 (1/15 dell'ampiezza naturale).

frequenti, si presentano pure oscillazioni libere con periodi propri dell'ordine di 22-24^m (fig. 5-A; fig. 6-B). La loro persistenza lasciava prevedere che tali oscillazioni interessavano l'intero lago. La riprova si è avuta con il modello: sperimentando infatti con periodi dell'ordine di 1,6-1,7^s, si è constatato che le oscillazioni mettevano in moto l'intera massa liquida.

Per quanto concerne le cause, che danno origine ai vari tipi di oscillazione registrati a Peschiera, siamo del parere che la più efficiente sia quella legata al transito di perturbazioni microbariche provenienti da Nord-Ovest. Quando dette perturbazioni si propagano verso Peschiera con velocità dell'ordine di quelle che caratterizzano le onde libere del lago sottostante, alla base del golfo (cioè a Peschiera) si verificano spostamenti in senso verticale tanto più ampi quanto più detta condizione viene rispettata. Ciò è stato già rigorosamente verificato con le sesse del golfo di Trieste (⁶). Anche negli esempi riportati vi sono casi che possono senz'altro essere attribuiti alla suddetta origine (fig. 6-B).

Ad ogni modo, il risultato più notevole della ricerca è quello di aver provato, ancora una volta, che l'oscillazione di 30^m ca. non è affatto la binodale interessante l'intero lago, come aveva supposto Defant, bensì un'oscillazione che riguarda sia a Nord (Riva) che a Sud (Peschiera) porzioni limitate di lago, oscillanti con le caratteristiche proprie dei bacini aperti.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Ottobre 1953.

RIASSUNTO

Si riportano i risultati di una lunga ricerca, intesa a spiegare il complesso di oscillazioni libere che vengono registrate a Peschiera, alla base del bacino orientale del lago di Garda. Fra queste oscillazioni, di particolare interesse si presentava quella avente un periodo di 30^m ca. La spiegazione fisica di questa sesa era rimasta controversa per oltre un quarantennio. Questa ricerca ha permesso di chiarire che tale oscillazione non è affatto la binodale dell'intero lago, come sosteneva Defant, ma interessa solo una parte del golfo di Peschiera-Garda, del quale costituisce l'oscillazione fondamentale. Ciò in analogia con la corrispondente oscillazione, di ugual periodo, che muove la

parte settentrionale del Garda, come provano le registrazioni ottenute a Riva.

Alcune considerazioni finali si riferiscono alla probabile origine delle oscillazioni libere che vengono registrate a Peschiera.

SUMMARY

This report concerns the results of an extensive research, intended to explain the complex of free oscillations which are registered at Peschiera, at the base of the eastern basin of the Lake of Garda. Among these oscillations, there was one of particular interest which had a period of about 30^m. The physical explanation of this seiche has remained controversial for more than forty years. This research has shown clearly that such an oscillation is not at all bi-nodal in the whole lake as maintained by Defant, but concerns only a part of the gulf of Peschiera-Garda, from which these fundamental oscillation is formed. This is analogous to the corresponding oscillation, of equal period, which moves the northern part of Garda, as is shown by the registrations obtained at Riva.

Some final considerations refer to the probable origin of the free oscillations which are registered at Peschiera.

BIBLIOGRAFIA

(1) CALOI P. - SPADEA M. C., *Su una questione di idrodinamica concernente il lago di Garda*. Rend. Acc. Naz. Lincei, Classe Sc. fis. mat. e nat., serie VIII, vol. XIV, fasc. 3 (1953).

(2) CALOI P., *Le sesse del lago di Garda*. Parte III. *Prove con il modello*. Annali di Geofisica, II (1949).

(3) CALOI P., *Le sesse del lago di Garda*. Parte II. Annali di Geofisica, I (1948).

(4) HONDA K., TERADA T., YOSHIDA Y., ISITANI D., *An investigation on the secondary Undulations of oceanic Tides*. The Journal of the College of Science, XXIV (1908).

(5) NEUMANN G., *Über Resonanzschwingungen von Meeresbuchten und die Mündungskorrektur bei Seiches*. Deutsch. Hydrograph. Zeitschrift, I (2/3), 1948.

(6) CALOI P., *Sesse dell'alto Adriatico, con particolare riguardo al Golfo di Trieste*. Com. Tass. It., Mem. CCXLVII (1938).